# Contrôle Commun – Mathématiques

Mardi 12 Mai 2009 *(Durée : 2 heures)*

Ce sujet comporte trois pages ; le barème est donné ici à titre purement indicatif.

Lisez attentivement les questions et répondez-y précisément, en justifiant vos réponses (sauf précision contraire). Les efforts de rédaction seront appréciés à leur juste valeur.

Vous rendrez **trois copies séparées** (en notant vos nom, prénom et classe sur chacune) :

- une copie pour les exercices 1 et 2 (ne pas oublier l'énoncé ...) ;
- une copie pour l'exercice 3 ;
- une copie pour les exercices 4 et 5.

**L'usage de la calculatrice est strictement interdit**

## Exercice 1 — 5 points

Vous donnerez les réponses aux questions suivantes ***sur l'énoncé et sans justification***.

1. La forme irréductible de $\dfrac{\dfrac{3}{4}-2\times\dfrac{5}{3}}{1+\dfrac{4}{3}}$ est ..............................................
2. Écrire le réel $A=\left(2+\sqrt{2}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{8}$ sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où $a$, $b$ et $c$ sont des entiers : ..............................................................
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x}{3}+3<2x+\dfrac{1}{3}$ est .......................
4. L'ensemble des nombres réels $x$ vérifiant $|x+1|\leqslant 3$ est ........................
5. Factoriser $f(x)=(2x-1)^2-(x-3)^2$ : ..............................................

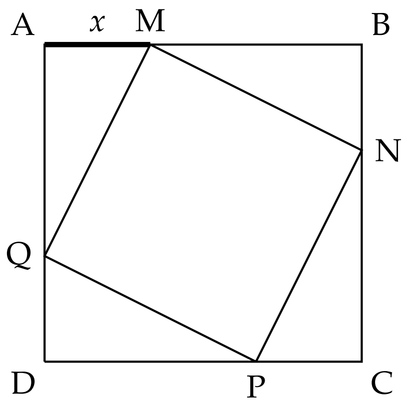
## Exercice 2 — 5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, on définit les points $A(2;3)$, $B(4;1)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x+1$.

1. Déterminer **par le calcul** une équation de la droite (AB).
2. Déterminer **par le calcul** une équation de $\Delta$, la droite parallèle à $\mathscr{D}$ passant par B.
3. Calculer les coordonnées du point C, intersection de $\mathscr{D}$ et (AB).
4. Donner enfin la valeur exacte de la distance AC.

## Exercice 3 10 points

### Partie A




On considère un carré ABCD de côté AB = 6 cm. Soit un point M un point de [AB] ; on note $x$ la distance AM en cm. On construit les points N, P et Q sur les côtés [BC], [CD] et [DA] tels que AM = BN = CP = DQ = $x$ (comme sur la figure ci-contre). On admet que **le quadrilatère MNPQ est un carré**.

1. (a) À quel intervalle le réel $x$ appartient-il ?

   (b) Exprimer la longueur MN en fonction de $x$.

   (c) En déduire l'expression de l'aire A($x$) du carré MNPQ (en cm$^2$).

2. L'aire A($x$) varie en fonction de $x$. En observant la figure et **sans justification**, indiquer pour quelles positions de M l'aire A($x$) semble maximale ou minimale.

### Partie B

On définit sur l'intervalle $[0;6]$ la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 12x + 36$.

3. (a) Démontrer que $f(x) = 2\left[(x-3)^2 + 9\right]$ pour tout $x \in [0;6]$.

   (b) Déterminer l'image de 2 par $f$.

   (c) Rechercher les antécédents de $-1$ et 26 par $f$.

4. Étudier les variations de la fonction $f$ sur les intervalles $[0;3]$ et $[3;6]$, puis dresser son tableau de variations. *On pourra utiliser la question 3(a) ...*

5. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$. *On se contentera d'un tracé à main levé, sans utiliser de tableau de valeurs.*

   En s'aidant de la question 3 (c), résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 26$.

### Partie C

On revient à la situation de la première partie.

6. Géométriquement, que représente le nombre $f(x)$ ?

7. Retrouver les résultats obtenus à la question 2.

8. Pour quelles valeurs de $x$ l'aire A($x$) est-elle supérieure ou égale à 26 cm$^2$ ?

## Exercice 4 — 5 points

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. On définit les points I et K par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

On désigne enfin par G le milieu du segment [CI].

1. (a) Faire une figure, **en utilisant intelligemment le quadrillage**.

   (b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les droites (AK) et (CI) ?

2. (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

   (b) De même, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 1(b).

## Exercice 5 — 5 points

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \longmapsto 4x^2 + 8x + 3$.

1. Montrer que $g(x) = 4(-x-1)^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En utilisant le résultat de la question précédente, factoriser $g(x)$.

3. Étudier le signe de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{(2x+1)(2x+3)}{1-2x}$ sur son ensemble de définition.

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{4x^2+7}{1-2x} \leqslant 4$.