

Exercice 1

1. La forme irréductible de $\frac{\frac{3}{4} - 2 \times \frac{5}{3}}{1 + \frac{4}{3}}$ est $\boxed{-\frac{31}{28}}$.

En effet, $\frac{3}{4} - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{3}{4} - \frac{10}{3} = \frac{9 - 40}{12} = -\frac{31}{12}$ et $1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

si bien que $\frac{\frac{3}{4} - 2 \times \frac{5}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{31}{12}}{\frac{7}{3}} = -\frac{31}{12} \times \frac{3}{7} = -\frac{31 \times 3}{3 \times 4 \times 7} = -\frac{31}{28}$

2. Écrire le réel $A = (2 + \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{8}$ sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a , b et c sont des entiers : $\boxed{A = 7 + 2\sqrt{2}}$.

En effet, $(2 + \sqrt{2})^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$

et $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ puis $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

si bien que $A = 6 + 4\sqrt{2} - (-1) - 2\sqrt{2} = 7 + 2\sqrt{2}$

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x}{3} + 3 < 2x + \frac{1}{3}$ est $\boxed{\mathcal{S} = \left] \frac{8}{5}; +\infty \right[}$.

En effet, $\frac{x}{3} + 3 < 2x + \frac{1}{3} \iff x + 9 < 6x + 1$ (car $3 > 0$)
 $\iff 8 < 5x$
 $\iff x > \frac{8}{5}$ (car $5 > 0$)

4. L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x + 1| \leq 3$ est $\boxed{\mathcal{S} = [-4; 2]}$.

En effet, $|x + 1| \leq 3 \iff -3 \leq x + 1 \leq 2 \iff -4 \leq x \leq 2$

5. Factoriser $f(x) = (2x - 1)^2 - (x - 3)^2$: $\boxed{f(x) = (3x - 4)(x + 2)}$.

En effet $f(x) = (2x - 1)^2 - (x - 3)^2$
 $= [(2x - 1) + (x - 3)][(2x - 1) - (x - 3)]$
 $= (3x - 4)(x + 2)$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Son ordonnée à l'origine est alors $b = y_A - a x_A = 3 - (-1) \times 2 = 3 + 2 = 5$.

Ainsi

$$\boxed{\text{La droite (AB) admet pour équation } y = -x + 5.}$$

2. Les droites Δ et \mathcal{D} étant parallèles, elles ont le même coefficient directeur, à savoir 2. De plus, l'ordonnée à l'origine de Δ est $b = y_B - 2x_B = 1 - 2 \times 4 = -7$.

Par conséquent,

$$\boxed{\text{La droite } \Delta \text{ admet pour équation } y = 2x - 7.}$$

3. Les droites \mathcal{D} et (AB) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes. Soit $C(x; y)$ leur point d'intersection : on a alors

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x + 1 = -x + 5 \end{cases}$$

Or $2x + 1 = -x + 5 \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3}$

si bien que $y = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15 - 4}{3} = \frac{11}{3}$

Ainsi

$$\boxed{\text{Le point d'intersection des droites } \mathcal{D} \text{ et (AB) est } C\left(\frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right).}$$

4. On a
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}.}$$

Exercice 3**Partie A**

1. (a) Le point M appartient au segment [AB], donc la distance $AM = x$ est comprise entre $AA = 0$ et $AB = 6$. Ainsi, $x \in [0; 6]$ pour tout $M \in [AB]$.

(b) Considérons le triangle MNP.

- On a $BN = AM = x$ et $MB = AB - AM = 6 - x$.
- Le quadrilatère ABCD est un carré donc $\widehat{ABC} = \widehat{MBN} = 90^\circ$.
De ce fait, le triangle MNP est rectangle en B.

- On déduit alors du théorème de Pythagore que

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 = x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + x^2 - 12x + 36 = 2x^2 - 12x + 36$$

Il s'ensuit que

$$MN = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}.$$

- (c) Comme MNPQ est un carré, son aire est

$$A(x) = MN^2 = 2x^2 - 12x + 36$$

2. Une observation fine de la figure nous permet de voir que

L'aire $A(x)$ est minimale lorsque M est le milieu de [AB] (donc pour $x = 3$), et maximale lorsque $M = A$ ou $M = B$ (donc pour $x = 0$ ou $x = 6$).

Partie B

3. (a) Pour tout réel $x \in [0; 6]$, on a

$$\begin{aligned} 2[(x - 3)^2 + 9] &= 2[x^2 - 6x + 9 + 9] \\ &= 2[x^2 - 6x + 18] \\ &= 2x^2 - 12x + 36 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

si bien que

$$f(x) = 2[(x - 3)^2 + 9] \text{ pour tout } x \in [0; 6].$$

- (b) En particulier, $f(2) = 2[(2 - 3)^2 + 9] = 2[1 + 9] = 20$: autrement dit,

$$\text{L'image de 2 par } f \text{ est } f(2) = 20.$$

- (c) Les antécédents de -1 et 26 par f sont, par définition, les solutions respectives des équations $f(x) = -1$ et $f(x) = 26$.

- Pour tout $x \in [0; 6]$, on a $(x - 3)^2 \geq 0$ donc $(x - 3)^2 + 9 \geq 9 > 0$ soit $f(x) > 0$.

De ce fait, l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $[0; 6]$,

Autrement dit

$$-1 \text{ n'admet pas d'antécédent par } f.$$

- Pour tout $x \in [0; 6]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = 26 &\iff 2[(x - 3)^2 + 9] = 26 \\ &\iff (x - 3)^2 + 9 = 26/2 = 13 \\ &\iff (x - 3)^2 = 4 = 2^2 \\ &\iff x - 3 = 2 \text{ ou } x - 3 = -2 \\ &\iff x = 5 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Comme 1 et 5 appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$, on en déduit que

$$\text{Les antécédents de 26 par } f \text{ sont 1 et 5.}$$

4. Pour tous réels a et b , on a

$$\begin{aligned} 0 \leq a < b \leq 3 &\implies a - 3 < b - 3 \leq 0 \\ &\implies (a - 3)^2 > (b - 3)^2 \quad (\text{la fonction carré est décroissante sur } \mathbb{R}_-) \\ &\implies (a - 3)^2 + 9 > (b - 3)^2 + 9 \\ &\implies 2[(a - 3)^2 + 9] > 2[(b - 3)^2 + 9] \end{aligned}$$

soit $0 \leq a < b \leq 3 \implies f(a) > f(b)$

Ainsi La fonction f est strictement décroissante sur $[0; 3]$.

On a de même pour tous réels a et b

$$\begin{aligned} 3 \leq a < b \leq 6 &\implies 0 \leq a - 3 < b - 3 \\ &\implies (a - 3)^2 < (b - 3)^2 \quad (\text{la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\implies (a - 3)^2 + 9 < (b - 3)^2 + 9 \\ &\implies 2[(a - 3)^2 + 9] < 2[(b - 3)^2 + 9] \end{aligned}$$

soit $3 \leq a < b \leq 6 \implies f(a) < f(b)$

Ainsi La fonction f est strictement croissante sur $[3; 6]$.

Enfin $f(3) = 2(0 + 9) = 18$ et $f(0) = f(6) = 2(9 + 9) = 36$

Ceci nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 6]$:

x	0	3	6
$f(x)$	36	18	36

5. La courbe représentative de f est une partie de parabole, de sommet $S(3; 18)$, comprise entre les abscisses 0 et 6 ; elle possède une tangente horizontale d'équation $y = 18$ et un axe de symétrie d'équation $x = 3$.

Sachant que $f(1) = f(5) = 26$, on observe que les points d'ordonnée supérieure à 26 sur cette courbe ont une abscisse ou bien plus petite que 1 ou bien plus grande que 5. Ceci nous montre que

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 26$ est $\mathcal{S} = [0; 1] \cup [5; 6]$.

Partie C

6. Comme on a pu le voir lors de la question 1 (c),

Le nombre $f(x)$ représente l'aire $A(x)$ du carré $MNPQ$.

7. D'après son tableau de variations, la fonction f admet un minimum en 3 (de valeur 18) et un maximum en 0 et en 6 (de valeur 36). Ceci signifie que

L'aire $A(x)$ est minimale lorsque $x = 3$ (donc quand M est le milieu de $[AB]$), et elle est maximale lorsque $x = 0$ ou $x = 6$ (donc lorsque $M = A$ ou $M = B$).

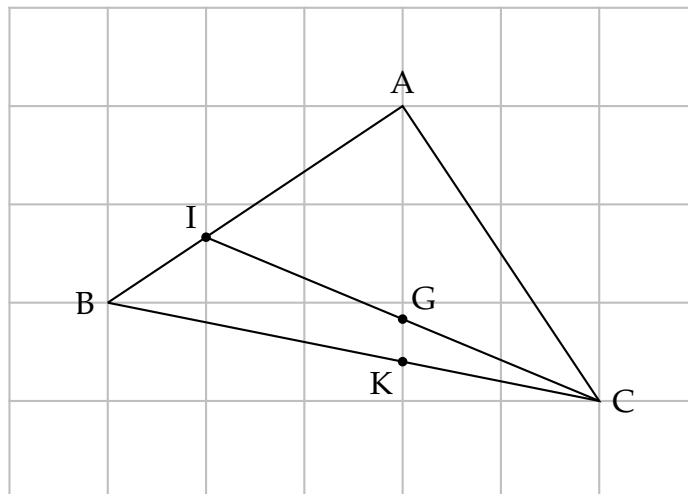
On retrouve ainsi les résultats de la question 2.

8. D'après la question 5,

L'aire $A(x)$ est supérieure ou égale à 26 cm^2 lorsque $x \in [0; 1] \cup [5; 6]$.

Exercice 4

1. (a) Voici un dessin possible :



- (b) On observe que Les droites (AK) et (CI) se coupent en G .

2. (a) Comme G est le milieu du segment $[CI]$, on a $\vec{CG} = \frac{1}{2} \vec{CI}$.

On déduit alors de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned} \vec{AG} &= \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{CI} \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{AI}) \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2} \left(-\vec{AC} + \frac{2}{3} \vec{AB} \right) \\ &= \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{AB} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

Autre méthode : $G=m[CI]$ donc, d'après l'égalité de la médiane (? j'ai un doute sur le nom ... c'est un avatar de l'identité du parallélogramme), il vient

$$\vec{AI} + \vec{AC} = 2\vec{AG} \quad \text{soit} \quad \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AI} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

(b) Toujours d'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} \vec{AK} &= \vec{AB} + \vec{BK} \\ &= \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{3}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{AB} - \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}}$$

3. Il découle des deux questions précédentes que

$$\begin{aligned} 6\vec{AG} &= 6\left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right) \\ &= 2\vec{AB} + 3\vec{AC} \\ &= 5\left(\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}\right) \\ &= 5\vec{AK} \end{aligned}$$

Ainsi $6\vec{AG} = 5\vec{AK}$, ce qui prouve que les vecteurs \vec{AG} et \vec{AK} sont colinéaires.

On en déduit que les points A, G et K sont alignés : autrement dit, le milieu G de [CI] appartient également à la droite (AK). Par conséquent,

Les droites (AK) et (CI) se coupent en G, milieu de [CI].

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5

$$\begin{aligned} 1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad & 4(-x-1)^2 - 1 = 4(x^2 + 2x + 1) - 1 \\ & = 4x^2 + 8x + 4 - 1 \\ & = 4x^2 + 8x + 3 \\ & = g(x) \end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{g(x) = 4(-x-1)^2 - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) &= 4(-x-1)^2 - 1 = 4(x+1)^2 - 1 \\ &= (2x+2)^2 - 1^2 \\ &= (2x+2+1)(2x+2-1) \\ &= (2x+1)(2x+3) \end{aligned}$$

Ainsi

$$g(x) = (2x+1)(2x+3) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. L'expression $h(x)$ est définie quand son dénominateur $1-2x$ est non nul.

Comme $1-2x=0 \iff 2x=1 \iff x=1/2$, elle l'est donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ainsi

$$\text{L'ensemble de définition de } h \text{ est } \mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Étudions maintenant le signe de h sur \mathcal{D}_h . On a

$$2x+1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -1/2$$

et

$$2x+3 \geq 0 \iff 2x \geq -3 \iff x \geq -3/2$$

puis

$$1-2x \geq 0 \iff 2x \leq 1 \iff x \leq 1/2$$

Ceci nous permet de dresser le tableau de signe de h :

x	$-\infty$	$-3/2$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$	
$2x+1$	-	-	0	+	+	
$2x+3$	-	0	+	+	+	
$1-2x$	+	+	+	0	-	
$h(x)$	+	0	-	0	+	-

4. Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+7}{1-2x} \leq 4 &\iff \frac{4x^2+7}{1-2x} - 4 \leq 0 \\ &\iff \frac{4x^2+7}{1-2x} - \frac{4-8x}{1-2x} \leq 0 \\ &\iff \frac{4x^2+8x+3}{1-2x} \leq 0 \\ &\iff \frac{(2x+1)(2x+3)}{1-2x} \leq 0 \quad (\text{cf. question 2}) \\ &\iff h(x) \leq 0 \iff x \in [-3/2; -1/2] \cup]1/2; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc } \mathcal{S} = [-3/2; -1/2] \cup]1/2; +\infty[.$$